

Elméleti kérdések¹

1. a) Mikor nevezünk két halmazt azonos számosságúnak? (1 pont)

Válasz:

- b) A természetes számok halmaza milyen számosságú? **Válasz:**_____ (1 pont)

- c) Soroljon fel két olyan számhalmazt, amelynek a számossága megegyezik a természetes számok hamazával, és két olyan halmazt, amely nem azonos számosságú a természetes számok halmazával! **Válasz:** (2 pont)

- d) Mondjon ki egy érvényes számosságokra vonatkozó tételt. (1 pont)

Válasz:

2. a) A valós számtest feletti lineáris tér egy X nem üres halmazt jelent, melyen egy összeadás művelet $(+)$ és egy skalárral való szorzás értelmezett. Milyen tulajdonságokkal kell, hogy rendelkezzen az $+$ művelete? (2 pont)

Válasz:

- b) Legyen $(X, \mathbb{R}, +, \cdot)$ egy valós számtest feletti vektortér. Mikor nevezzük az $L : X \rightarrow X$ leképezést lineárisnak? (1 pont)

Válasz:

- c) Mondja ki a kifejtési tételt! **Válasz:** (2 pont)

3. a) Írja le az eseményalgebrára (σ -algebra) vonatkozó Kolmogorov-féle axiómákat! (1 pont)

Válasz:

¹Az összes kérdés helyes megoldásával 20 pont érhető el. A feladatok mellett feltüntetett részpontszámok az ebben a blokkban megszerezhető pontokat jelölik.

- b) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, továbbá A, B események $(A, B \in \mathcal{A})$, melyekre $A \subseteq B$. Milyen valószínűségekre vonatkozó állításokat tud megfogalmazni A, B -vel kapcsolatban?

Válasz: (1 pont)

- c) Mondjon ki mindkét irányú kapcsolatot egy folytonos valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvénye között!

Válasz:

(2 pont)

- d) Mikor nevezünk egy valószínűségi változót diszkrét valószínűségi változónak?

Válasz:

(1 pont)

4. a) Hogyan értelmezzük az $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) téren a skaláris szorzatot! Írja le tulajdonságait!

Válasz:

(2 pont)

- b) Írja le a kétváltozós vagy többváltozós (ahogy kényelmesebb) függvény folytonosságának definícióját!

Válasz:

(1 pont)

- c) Írja le a kétváltozós függvények első változó szerinti parciális deriváltjának definícióját!

Válasz:

(1 pont)

- d) Írja le a kétváltozós függvény lokális szélsőértékére vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt!

Válasz:

(1 pont)

Feladatok²:

5. Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a két dobott szám szorzata 2-vel osztható lesz, de 4-gyel nem!

(5 pont)

Megoldás: (Megoldását a következő oldalon folytathatja.)

²Az összes feladat helyes megoldásával 25 pont érhető el. A feladatok mellett feltüntetett részpontoszámok az érettségi feladatok hivatalos pontértékei; ezek figyelembevételével, arányosítással kerül meghatározásra a feladatblokkban elért összpontszám.

6. Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy $4^n + 6n - 1$ minden n pozitív egész szám esetén osztható 9-cel! (7 pont)

Megoldás:

7. Felül nyitott, négyzet alapú egyenes hasáb alakú tárolódobozt készítünk. A doboz alaplappjának anyagköltsége 4 taller négyzetdeciméterenként, az oldallapok anyagköltsége 3 taller négyzetdeciméterenként. Az egész doboz anyagköltségére összesen 300 taller áll rendelkezésre.

Határozza meg a 300 tallérból elkészíthető maximális térfogatú doboz éleinek hosszát!

(8 pont)

Megoldás:

8. Tekintsük azt a háromszöget, amelyeknek a , b és c oldalaira teljesül, hogy (centiméterben mérve) $b = a + 4$ és $c = a + 8$ és legnagyobb szöge 120° . Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát! (6 pont)

Megoldás:

9. a) Határozza meg az $a_n = \frac{n+4}{n}$ sorozat határértékét! (3 pont)

b) Igazolja, hogy az a_n sorozat szigorúan monoton csökkenő! (3 pont)

c) Határozza meg azokat az n pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy

$$\frac{(n+4)!}{n!} = 24(n+1)(n+3). \quad (5 \text{ pont})$$

d) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 24(x+1)(x+3)$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt korlátos síkidom területét! (5 pont)

Megoldás: